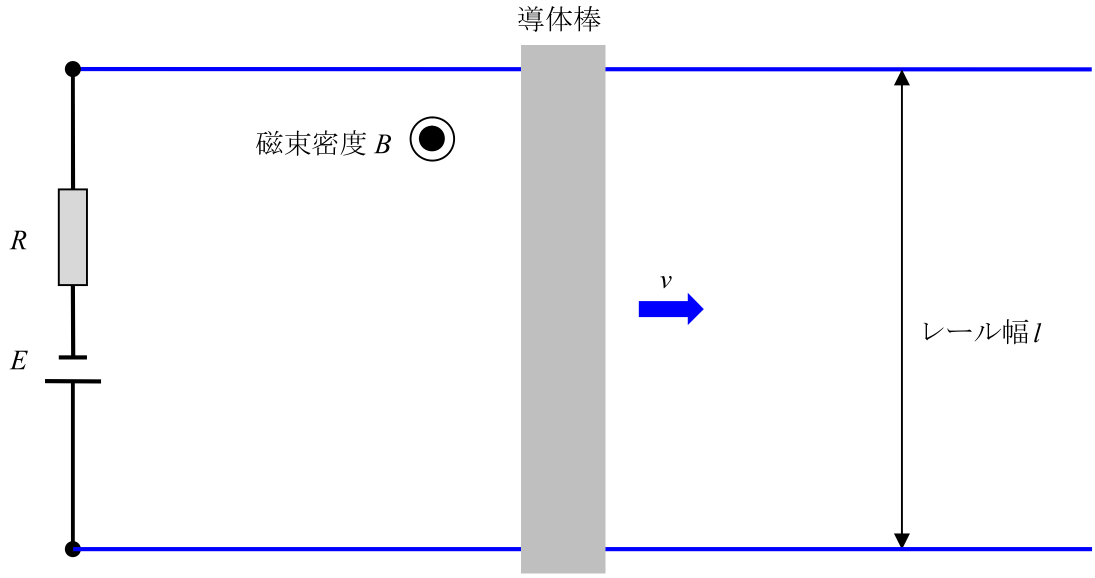
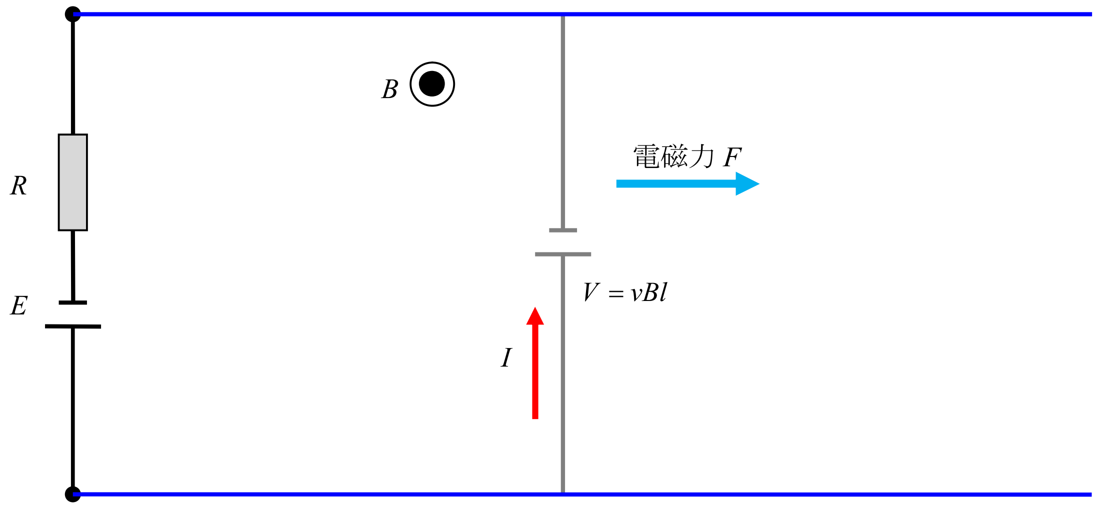
磁束を切りながら動く導体棒の速度と時間の関係式



鉛直上方向に磁束密度 B の磁界がある条件の下，幅が l の水平なレール上に質量 m の導体棒がレールに垂直になるようにのっており，時刻 0 のとき，起電力 E の電源と大きさ R の抵抗を上図のように接続する。尚，導体棒の運動方向に平行な外力は電磁力のみとする。

導体棒は，フレミング左手の法則より，上図右方向に電磁力を受け加速度運動し，ある時刻 t のとき，その速さが v になったとすると，導体棒には，電源の起電力の向きと逆向きに，大きさ vBl の誘導起電力が生じる。このとき回路を流れる電流を I とすると，上図は下図のようにデフォルメできる。



時刻 t のとき回路を流れる電流の大きさ I

誘導起電力の大きさは電源の起電力の大きさより常に小さいから,

回路全体の起電力の大きさは, $E-vBl$

これとキルヒホッフの第 2 法則より, $RI=E-vBl \quad \therefore I=\dfrac{E-vBl}{R}$

時刻 t のとき導体棒が受ける電磁力の大きさ F

$I=\dfrac{E-vBl}{R}$ より, 導体棒が受ける電磁力 $F=IBl=\dfrac{E-vBl}{R}\cdot Bl$

よって, $F=\dfrac{Bl}{R}\cdot(E-vBl)$

導体棒の運動方程式

したがって, 右向きを正とし, 導体棒の加速度を a とすると,

導体棒の運動方程式は, $ma=F$ であり,

これと $a=\dfrac{dv}{dt}$, $F=\dfrac{Bl}{R}\cdot(E-vBl)$ より,

$$m\frac{dv}{dt}=\frac{Bl}{R}(E-vBl) \quad \therefore \frac{dv}{E-vBl}=\frac{Bl}{mR}dt$$

導体棒の運動方程式を解く

つぎに, 微分方程式 $\dfrac{dv}{E-vBl}=\dfrac{Bl}{mR}dt$ を解く。

$\displaystyle\int\frac{dv}{E-vBl}=\int\frac{Bl}{mR}dt$ より, 積分定数を α とすると, $-\log|E-vBl|=\dfrac{Bl}{mR}t+\alpha$

$E>vBl$ より, $-\log(E-vBl)=\dfrac{Bl}{mR}t+\alpha \quad \therefore E-vBl=e^{-\frac{Bl}{mR}}\cdot e^{-\alpha}$

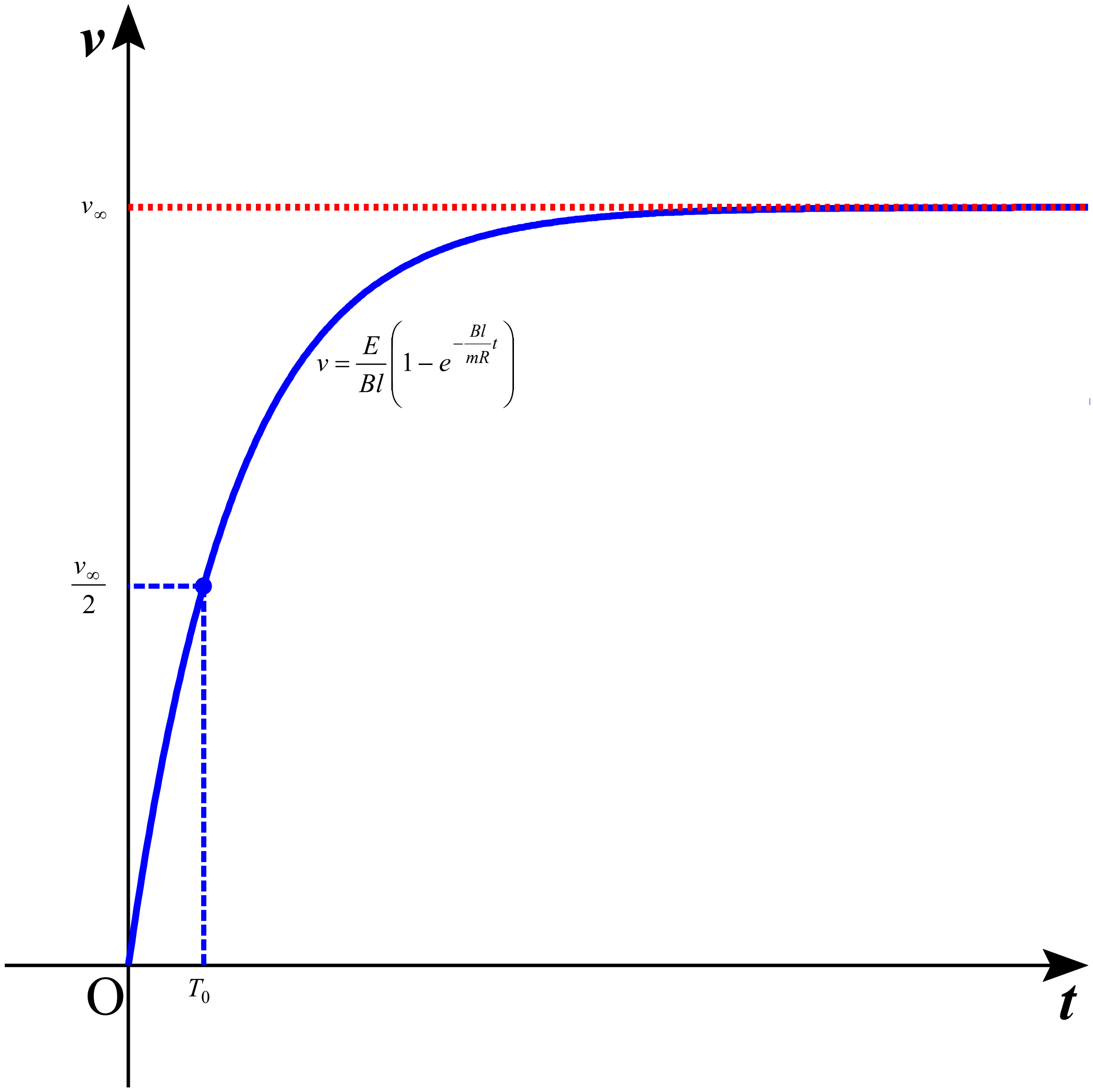
$t=0$ のとき, $v=0$ だから, $E=e^{-\alpha} \quad \therefore E-vBl=e^{-\frac{Bl}{mR}}\cdot E$

これを整理することにより,

磁束を切って動く導体棒の速度と時間の関係式: $v=\dfrac{E}{Bl}\left(1-e^{-\frac{Bl}{mR}t}\right)$ が得られる。

また, $v(t)$ の極限を v_∞ とすると, $v_\infty=\lim\limits_{t\to\infty}v(t)=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{E}{Bl}\left(1-e^{-\frac{Bl}{mR}t}\right)=\dfrac{E}{Bl}$

よって, 導体棒の速度は限りなく $v_\infty=\dfrac{E}{Bl}$ 近づいていく。



ただし，$v_\infty = \frac{E}{Bl}$，$T_0 = \frac{mR}{Bl}\log 2$

$\dfrac{v_\infty}{2}$ となる時刻を T_0 とすると，$\dfrac{E}{2Bl}=\dfrac{E}{Bl}\left(1-e^{-\frac{Bl}{mR}T_0}\right)$ より，$e^{-\frac{Bl}{mR}T_0}=\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore e^{-\frac{Bl}{mR}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{T_0}}$

これと $v_\infty=\dfrac{E}{Bl}$ および $v=\dfrac{E}{Bl}\left(1-e^{-\frac{Bl}{mR}t}\right)$ より，$\dfrac{v}{v_\infty}=1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_0}}$